

Esercizio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ Quanto fa } A^{20} ?$$

$D = E^{-1} \cdot A \cdot E$ Dobbiamo trovare una matrice regolare E.

$$A = E \cdot D \cdot E^{-1}$$

$$A^{20} = E \cdot D \cdot E^{-1} \cdot E \cdot D \cdot E^{-1} \cdot \dots \cdot E \cdot D \cdot E^{-1} = E \cdot D^{20} \cdot E^{-1}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico.

$$\begin{aligned} p(\lambda) = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda + 1) \cdot [\lambda^2 \cdot (\lambda - 1)] = (\lambda + 1)[\lambda^2(\lambda - 1) - 2 + 4 - 2\lambda - 2\lambda + 2(\lambda - 1)] = (\lambda + 1)[\lambda^2(\lambda - 1) - 4\lambda + 2(\lambda - 1) + 2] = \\ &= (\lambda + 1)[(\lambda^2 + 2)(\lambda - 1) - 4\lambda + 2] = (\lambda + 1)(\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2 - 4\lambda + 2) = (\lambda + 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda) = \\ &= \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Gli autovalori sono 0, -1, 2, -1.

$$ma(0) = 1 = mg(0)$$

$$ma(-1) = 2 \quad 1 \leq mg \leq ma$$

$$ma(2) = 1 = mg(2)$$

1. Scrivo la matrice con $\lambda = 0$: la matrice che otteniamo è l'opposta di A

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Cerchiamo il nucleo.}$$

Le equazioni saranno linearmente dipendenti; cerchiamo un minore di rango massimo

$$ma = 1 = mg$$

Sappiamo che il sistema deve avere $\dim = 1$, quindi $\rho = 4 - 1 = 3$

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \\ w = 0 \end{cases}$$

I vettori moltiplicati per 0 sotto l'endomorfismo sono quelli del tipo: $(\alpha, \alpha, \alpha, 0), \forall \alpha \in \mathfrak{R}$, quindi una base, raccogliendo α , è $(1, 1, 1, 0)$.

2. Scrivo la matrice con $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ scegliamo come minore di rango massimo } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Considero solo x, y, w : z sarà il parametro α , e facciamo il sistema con le 3 righe coinvolte.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 3w = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x - 3z = 0 \Rightarrow x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \\ w = 0 \end{cases}$$

Una base per l'autospazio U_2 è data dal solo vettore $(1,0,1,0)$.

3. Scrivo la matrice con $\lambda = -1$, speriamo in $\rho = 2$ così la matrice sarà diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ La prima e la terza riga sono uguali, la quarta è nulla, quindi } \rho < 3$$

$$\rho = \begin{cases} 4 - 1 = 3 \\ 4 - 2 = 2 \end{cases} \text{ 3 non è possibile per quanto scritto sopra.}$$

La dimensione dell'autospazio è 2, quindi $ma(-1) = 2 = mg(-1)$: la matrice è diagonalizzabile.

$$\begin{cases} -x + 2y - 2z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \text{ definisco } z = \alpha; w = \beta$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 2\alpha & x = 0 \\ -x + y = \alpha & y = \alpha \\ 3y = 3\alpha \Rightarrow y = \alpha & z = \alpha \\ x = \alpha - y \Rightarrow x = 0 & w = \beta \end{cases}$$

Una base per l'autospazio è $\{(0,1,1,0), (0,0,0,1)\}$

$B1(1,1,1,0)$

$B2(1,0,1,0)$ è una base spettrale.

$B3(0,1,1,0), (0,0,0,1)$

A è un endomorfismo rispetto alla base canonica. La matrice associata rispetto alla base spettrale diventa una matrice diagonale, sulla cui diagonale ci sono gli autovalori:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ Per scrivere questa matrice non è necessario conoscere la base spettrale.}$$

L'ordine degli autovettori è dato dall'ordine degli autovalori usati per calcolare le basi.

$$D^{20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$$

La matrice E, nell'equazione $D = E^{-1}AE$ è la matrice che ha come colonne i vettori della base spettrale espressi rispetto alla base canonica.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ E è la matrice di passaggio dalla base canonica alla base spettrale.}$$

Calcoliamo E^{-1}

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R3=R3-R2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R1=R1-R3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R2=R1-R3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R3 \leftrightarrow R4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Provo che $E \cdot D \cdot E^{-1} = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolo $A^{20} = E \cdot D^{20} \cdot E^{-1}$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{20} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2^{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2^{20} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 0 & -2^{20} & 2^{20} & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2^{20} & 1+2^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$