Sistemi Lineari

Sistemi lineari e loro risolubilità

Chiamiamo <u>sistema lineare</u> di m equazioni in n incognite, a coefficienti nel campo K, una coppia $S = (A,b)$, dove A è una matrice di tipo $\left(a_j^i\right) \in M_{m\times n}(K)$ e $b = (b^1,...,b^m) \in K^m$.

Es: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ questo sistema lineare si può scrivere come un prodotto in cui la prima matrice è A e il risultato è il vettore b.

La matrice A è detta <u>matrice incompleta</u> o <u>matrice dei coefficienti</u>; la m-pla $b = (b^1,...,b^m) \in K^m$ è detta <u>m-pla dei termini noti</u> e la matrice colonna è detta <u>colonna dei termini noti</u>.

$$(b) = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

La trasformazione lineare standard $\tilde{T} : K^n \to K^n$, avente A quale matrice associata relativamente alle basi naturali di K^n e K^m, sarà detta <u>associata al sistema lineare</u> S.

Es: $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

In cui A è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, b è il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $n = 3$ è il numero delle colonne della matrice A ma anche la dimensione dello spazio di partenza e il numero delle incognite del sistema, mentre $m = 2$ è il numero di righe della matrice A ma anche il numero dei termini noti.

La trasformazione lineare associata ad A prende ogni terna $x\ y\ z$ e la trasporta nel valore

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{T} A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\tilde{T}$ è la trasformazione associata alla matrice del sistema.

Se $\left(x^1,\ldots,x^n\right)$ è una n-pla si simboli, dette incognite, posto $\left(x\right) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, il sistema lineare $S = (A,b)$ è rappresentato da una delle seguenti scritture, tutte tra loro equivalenti:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^i x^n = b^1 \\ \ldots \\ a_1^m x^1 + \ldots + a_n^m x^n = b^m \end{cases};$$

la scrittura compatta $\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j = b^i, \quad i \in \aleph_m$;

la scrittura ancora più compatta $A \cdot (x) = b$.

Si dice poi <u>matrice completa</u> del sistema lineare $S = (A, b)$, la matrice $C = (c_k^i) \in M_{m\times(n+1)}(K)$, le cui $n + 1$ colonne $c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}$ sono nell'ordine $a_1, \ldots, a_n, b$, cioè, riprendendo l'esempio di prima:

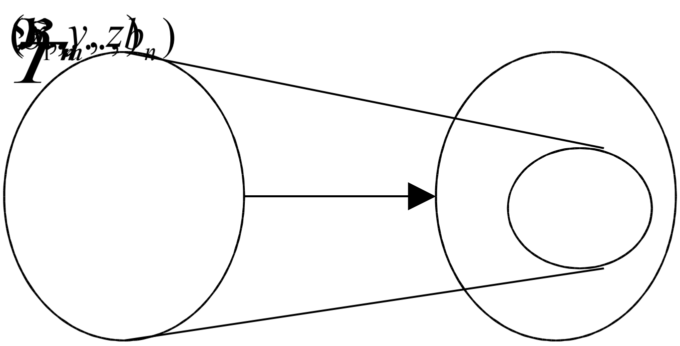
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

Un <u>sottosistema</u> di S è un sistema lineare le cui equazioni sono un sottoinsieme delle equazioni di S, cioè vengono mantenute solo le equazioni di posto $i_1, \ldots, i_n$ e tutte le altre vengono cancellate.

Se S' e S'' sono due sistemi lineari, rispettivamente di h e di k equazioni, nello stesso numero n di incognite, si dice <u>sistema unione</u> di S' e S'' il sistema lineare di $h + k$ equazioni in n incognite $S = S' \cup S''$ tale che $S(1, \ldots, h) = S'$ e $S(h+1, \ldots, h+k) = S''$.

Se $S = (A, b)$ è un sistema lineare di m equazioni in n incognite e $\tilde{T} : K^n \to K^m$ è la trasformazione lineare standard associata ad S, si dice <u>spazio delle soluzioni</u> di S l'insieme:

$$Sol(S) = \tilde{T}^{-1}(b) = \left\{ \bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) \in K^n \mid \tilde{T}(\bar{x}) = b \right\}.$$



$A(x) = b$

Cosa vuol dire che abbiamo trovato una soluzione?

$(x) \xrightarrow{\tilde{T}} A(x)$

b ha almeno una retroimmagine nella trasformazione lineare che porta (x) in A(x) e lo spazio delle soluzioni è la retroimmagine di b mediante $\tilde{T}$.

Si dice poi che S è <u>possibile</u> o <u>compatibile</u> (risp. <u>impossibile</u> o <u>incompatibile</u>) se $Sol(S) \neq \phi$ (risp. se $Sol(S) = \phi$).

Una n-pla $\bar{x} = \left(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n\right) \in K^n$ è una soluzione per il sistema lineare compatibile $S = (A, b)$ se e solo se, posto

$$\left(\bar{x}\right) = \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{pmatrix},$$

si ha: $A \cdot \left(\bar{x}\right) = b$, essendo b la colonna del termini noti.

Cioè una n-pla $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ di elementi di K è una soluzione di S se e solo se $\forall i \in \aleph_m$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i \bar{x}^j = b^i$$

cioè se e solo se, sostituita alla n-pla delle incognite, soddisfa tutte le equazioni di S.

Se, per ogni $i \in \aleph_m$, $S(i)$ denota il sottosistema di S la cui unica equazione è la i-esima equazione di S, si ha evidentemente:

$$Sol(S) = \bigcap_{i \in \aleph_m} Sol(S(i))$$

Quindi se $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ è una soluzione del sistema lineare S, allora $\bar{x}$ è anche soluzione di tutti i sottosistemi di S.

Due sottosistemi S' e S'', nello stesso numero di incognite, si dicono <u>equivalenti</u> se $Sol(S') = Sol(S'')$. Inoltre, permutando le equazioni di un sistema lineare S, si ottiene un sistema equivalente a S.

Un sistema lineare $S = (A, 0)$, avente la m-pla nulla quale m-pla dei termini noti, è detto <u>omogeneo</u>.

Un sistema è omogeneo se l'equazione $A(x) = 0$, la coppia è quindi $(A, 0)$. Un sistema lineare omogeneo è <u>sempre compatibile</u> perché ammette sempre come soluzione la soluzione banale $0 = (0, \dots, 0) \in K^n$.

Lo spazio Sol(S) delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in *n* incognite è un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione $n - \rho(A)$.

Infatti se $\tilde{T} : K^n \to K^m$ è una trasformazione lineare standard associata ad S, allora

$$Sol(S) = \tilde{T}(0) = Ker\,\tilde{T}$$

Per l'equazione dimensionale abbiamo che $\dim(Ker\,\tilde{T}) + \dim(\mathrm{Im}\,\tilde{T}) = n \cdot$ Sapendo che $\dim(\mathrm{Im}\,\tilde{T}) = \rho(A)$, si ottiene $\dim(Sol(S)) + \rho(A) = n$.

S ammette esattamente $n - \rho(A)$ soluzioni linearmente indipendenti e tutte le altre soluzioni sono loro combinazioni lineari.

Teorema di Rouché – Capelli: Un sistema lineare S è possibile se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

Avendo C esattamente una colonna in più rispetto ad A, per la definizione di rango, si ha

$$\rho(C) = \rho(A) \qquad \text{oppure} \qquad \rho(C) = \rho(A) + 1$$

Inoltre l'uguaglianza $\rho(C) = \rho(A)$ vale se e solo se la m-pla b dei termini noti è combinazione lineare delle colonne $a_1, \ldots, a_n$ di A, cioè se e solo se esiste $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n) \in K^n$ tale che

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{x}^j = b .$$

Se $\rho(C) = \rho(A)$, allora b è combinazione lineare delle colonne di $A = (a_1, \ldots, a_2)$. $\exists x_1, \ldots, x_n$ tale che $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b$, cioè b è combinazione lineare delle colonne di A.

Ma questo significa che $A(x) = b$, cioè esiste una soluzione, e se aggiungiamo b ad A(x) non ne cambiamo il rango.

Al contrario se $\rho(C) = \rho(A) + 1$ non esiste un modo per trovare soluzioni, perché non è possibile ottenere C combinando le colonne di A.

- Il teorema di Rouché – Capelli vale per i sistemi omogenei, in tal caso tuttavia, dal momento che $b = 0$, si ha che $\rho(C) = \rho(A)$ e quindi ogni sistema omogeneo ammette sempre almeno la soluzione banale.

Si dice <u>sistema lineare omogeneo</u> associato ad S il sistema $S_0 = (A, 0)$, ottenuto sostituendo la m-pla nulla alla m-pla b dei termini noti.

Se $S = (A, b)$ è un sistema lineare compatibile in n incognite e $\bar{x} \in Sol(S)$, allora si ha che $Sol(S) = \left\{ \tilde{x} \in K \mid \tilde{x} - \bar{x} \in SolS_0 \right\}$, cioè tutte le altre soluzioni si ricavano prendendo tanti $\bar{x}$ tali che $\tilde{x} - \bar{x}$ siano soluzioni.

Tutte le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo si ottengono come la somma di una soluzione fissata più una o più soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

$$\bar{x} \in Sol(S) \Leftrightarrow A \cdot \left(\bar{x}\right) \Leftrightarrow A \cdot \left(\tilde{x} - \bar{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \tilde{x} - \bar{x} \in Sol(S_0)$$

L'applicazione $T_{\tilde{x}} : K^n \to K^m$, definita ponendo $\forall u \in K^n, T_{\tilde{x}}(u) = u + \tilde{x}$ è una biiezione, detta traslazione di ampiezza di $\tilde{x}$. Lo spazio delle soluzioni $SolS$ si ottiene traslando $SolS_0$ mediante $\tilde{x}$, di conseguenza $SolS$ e $SolS_0$ sono in corrispondenza biunivoca. Essendo $SolS_0$ un sottospazio vettoriale di dimensione $n-\rho(A)$, diciamo che un sistema lineare possibile S ammette $\infty^{n-\rho(A)}$ soluzioni.

Il rango $\rho(A)$ della matrice incompleta A sarà anche detto <u>rango del sistema</u> possibile S.

Un sistema lineare possibile ammette una ed una sola soluzione se e solo se il numero delle incognite coincide con il suo rango.

Se abbiamo in sistema lineare con n incognite, e se il sistema è possibile, allora $\rho(C) = \rho(A)$. Per sapere quante sono le soluzioni, studiamo il sistema lineare omogeneo associato, che è uno spazio vettoriale di dimensione $n-\rho(A)$. Solo quando $n = \rho(A)$ la soluzione è unica, cioè solo quando il numero delle incognite coincide con il rango.

Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni diverse dalla soluzione banale se e solo se il numero delle incognite è strettamente maggiore del suo rango.

Metodi di risoluzione per sistemi lineari

Un sistema lineare $S = (A,b)$ si dice <u>normale</u> o <u>di Cramer</u> (di ordine n) se la matrice incompleta A è quadrata (di ordine n) e regolare. Un sistema normale di ordine n ha lo stesso numero n di equazioni e di incognite, inoltre $\det A \neq 0$, ovvero $\rho(A) = n$.

Teorema di Cramer: ogni sistema lineare normale $S = (A,b)$ di ordine n ammette una ed una sola soluzione $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$, si ha inoltre:

$$\left(\bar{x}\right) = A^{-1} \cdot b$$

Formula di Leibniz – Cramer:

$$\forall i \in \aleph_n \qquad \bar{x}^i = (\det D_i) \cdot (\det A)^{-1}$$

D_i è la matrice ottenuta da A sostituendo alla sua i-esima colonna la colonna dei termini noti.

Se $A^{\#} = (A^i_j) \in M_n(K)$ è la matrice dei complementi algebrici degli elementi di A, si ha

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot {}^t(A^{\#}).$$