

Come risolvere l'esercizio sull'algorithmo del simplesso

Calcolo il modello di programmazione lineare seguendo le regole del testo.

Creo le mie "Variabili decisionali", ovvero segno cosa rappresentano i vari x_i .

x_i -> tonnellate/stock/etc di materiale i

(FAC) $x_i = 1$ -> X tonnellate/stock/etc di materiale i

Le informazioni sul profitto vanno nella funzione obiettivo: ad esempio "il guadagno ottenibile da una tonnellata di A è doppio di quello ottenibile da una sostanza di B" diventa $\max 2x_1 + x_2$.

Scrivo le equazioni delle rette (senza variabili surplus) e le metto sempre comunque in ordine con le variabili e le nomino con le lettere minuscole es. (a).

Ricordati di mettere sempre le $x_i \geq 0$ e in colonna.

Comincio a scrivere il modello:

Per utilizzare il metodo del simplesso, il problema deve essere in forma standard, ossia:

$$\min c'x = z$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Quindi prendendo le equazioni calcolate prima faccio alcune modifiche per soddisfare la forma standard:

$$\max z \rightarrow \min -z$$

$$x_1 \leq a \rightarrow x_1 + x_2 = a$$

$$x_1 \geq a \rightarrow x_1 - x_2 = a$$

- Se il mio termine noto è negativo, devo moltiplicare l'equazione per -1 per ottenere il termine noto ≥ 0
- Se mi viene chiesto di minimizzare le variabili ausiliarie, posso cercare di modificare le equazioni uguali a 0 e moltiplicarle per -1 in modo da ottenere le variabili surplus nella base (dovendo quindi evitare di creare una variabile ausiliaria inutile).

Ricorda di mettere sempre le $x_i \geq 0$ tutte in colonna con le altre variabili.

Algorithmo del simplesso:

Comincio a scrivere il tableau, evitando per un attimo la funzione obiettivo.

Se vedo di avere già nel mio tableau così com'è una matrice identità, la Fase 1 non è da fare e si passa direttamente alla Fase 2.

Fase 1:

Se non ho la matrice identità controllo quante colonne mi servono, e le aggiungo come variabili ausiliarie. La mia funzione obiettivo a questo punto è $\min x_i$. (minimizzare le variabili ausiliarie) quindi degli 1 sulle variabili ausiliarie, 0 altrove. Modifico la funzione obiettivo come trasformazione riga per avere degli 0 sulle colonne appartenenti alla matrice identità, quindi di solito $R_0' = R_0 - R_i$ in cui le R_i sono le righe delle funzioni ausiliarie.

1. Scrivo: Variabili in base: $\{x_i, x_j, x_l\}$ e segno a fianco dei termini noti a quale x si riferisce: nella prima riga rimando la colonna che ha l'1 della matrice identità e così via scendendo.
2. Scrivo: $x = (0, 0, \dots)$ e nei punti di x_i metto il valore noto; 0 altrimenti

3. Scrivo (fac): $z = \dots$
4. Dò un nome al mio tableau come lettera greca.

Ora cerco la colonna in cui fare il cambiamento di base e la tratteggio:

- Regola di Bland: cerco la prima colonna che ha costo negativo partendo da sinistra.
- Entra in base la colonna di costo relativo più negativo: autoesplicante, controllo il valore assoluto delle colonne con costo negativo.

5. Calcolo $\theta = \min \{ \text{per ogni riga: valore noto} / \text{valore della cella selezionata della colonna } i\text{-esima} \}$

- non conto le soluzioni in cui c'è 0 come dividendo o come divisore
- non conto le soluzioni negative

Cerchio il valore all'interno della colonna i -esima scelta che mi dà il minimo.

6. Trovata la variabile che entra in base, scrivo " X_j entra in base al posto di X_i " in cui j è la colonna tratteggiata, e i è quella della riga a cui è riferito il valore del termine noto.

Ora devo trasformare la colonna tratteggiata in una colonna appartenente alla base, quindi devo fare trasformazioni riga per ottenere 1 in concomitanza con il valore cerchiato, e 0 altrove in tutta la colonna, compresa la funzione obiettivo.

Le trasformazioni riga sono fatte così:

$R'(\text{in cui mettere } l'1) = R / \text{valore cerchiato}$

$R'(\text{altre righe}) = R - R'(\text{in cui ho } l'1) * \text{valore diverso da } 1 \text{ dell'altra riga (in modo da fare } X - X * 1 = 0)$

Scrivo: Variabili in base: $\{ x_i, x_j, x_l \}$

...

Continuo finché non ottengo come funzione obiettivo della fase 1 tutti 0 eccetto che sopra le variabili ausiliarie degli 1.

Quando ottengo questa configurazione, passo alla fase 2

Fase 2:

Ho il tableau modificato dalla fase 1; aggiungo come funzione obiettivo la funzione originaria del mio modello (il termine noto della funzione obiettivo è 0).

Modifico la funzione obiettivo tramite trasformazioni riga in modo da avere degli 0 sulle variabili costo della matrice identità.

1. Scrivo: Variabili in base: $\{ x_i, x_j, x_l \}$ e segno a fianco dei termini noti a quale x si riferisce: nella prima riga rimando la colonna che ha l'1 della matrice identità e così via scendendo.
2. Scrivo: $x = (0, 0, \dots)$ e nei punti di x_i metto il valore noto; 0 altrimenti
3. Scrivo (fac): $z = \dots$
4. Dò un nome al mio tableau come lettera greca. (Eccetto per il primo tableau seguente alla fase 1 perché è identica all'ultimo tableau della fase 1)

Ora cerco la colonna in cui fare il cambiamento di base e la tratteggio:

- Regola di Bland: cerco la prima colonna che ha costo negativo partendo da sinistra.
- Entra in base la colonna di costo relativo più negativo: autoesplicante, controllo il valore assoluto delle colonne con costo negativo.

5. Calcolo $\theta = \min \{ \text{per ogni riga: valore noto} / \text{valore della cella selezionata della colonna } i\text{-esima} \}$

- non conto le soluzioni in cui c'è 0 come dividendo o come divisore
- non conto le soluzioni negative

Cerchio il valore all'interno della colonna i -esima scelta che mi dà il minimo.

6. Trovata la variabile che entra in base, scrivo " X_j entra in base al posto di X_i " in cui j è la colonna tratteggiata, e i è quella della riga a cui è riferito il valore del termine noto.

Ora devo trasformare la colonna tratteggiata in una colonna appartenente alla base, quindi devo fare trasformazioni riga per riga per ottenere 1 in concomitanza con il valore cerchiato, e 0 altrove in tutta la colonna, compresa la funzione obiettivo.

Le trasformazioni riga sono fatte così:

$R'(\text{in cui mettere } 1) = R / \text{valore cerchiato}$

$R'(\text{altre righe}) = R - R'(\text{in cui ho } 1) * \text{valore diverso da } 1 \text{ dell'altra riga (in modo da fare } X - X*1 = 0)$

Scrivo: Variabili in base: $\{ x_i, x_j, x_l \}$

...

La Fase 2 finisce quando la funzione obiettivo è tutta positiva, quindi scrivo " $c \geq 0$ " e "Soluzione ottima".

Scrivo poi il valore degli x_i e il profitto ottenuto.

Disegnare la regione ammissibile:

1. Disegno gli assi cartesiani: per ogni variabile, un'asse cartesiano.
2. Disegno le rette delle equazioni e le nomino con i nomi che ho dato nelle equazioni. Quando ho disegnato tutte le rette ho ottenuto un'area chiusa (ricorda che le variabili sono positive o nulle).
3. Evidenzio e nomino tutti i punti dell'area (compreso lo 0,0 se è un vertice della figura).
4. Per ogni soluzione del tableau nominata con la lettera greca prendo le variabili decisionali ed ottengo un punto nel grafico. Segno vicino al punto la lettera greca che la contraddistingue e controllo che i punti ottenuti tramite il tableau siano punti segnati con le lettere maiuscole.

Nel caso di Fase 1 non ti preoccupare se i punti sono inizialmente esterni ai bordi della figura, o eventualmente coincidenti, basta che almeno l'ultimo punto della fase 1 calcolato sia nei bordi della figura.

5. Calcolo Δz come vettore delle derivate parziali $= (dz / dx_i)$ e disegno nel grafico tale vettore.