Come risolvere le prove d'esame di Caini.

Dato il segnale periodico riportato in figura sono richiesti:

L'espressione dello sviluppo in serie di Fourier

Calcolare la x(t)=mt+q

q = offset, cioè se il grafo nell'origine passa per 0,0 allora q=0

Controllare dal grafico il valore di x(t) in un altro punto e trovarne le coordinate, per esempio x(t) =A quando t=T: allora A=T*t.

Calcoliamo la serie di Fourier come: $c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$

Ricordiamo che $e^{\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ e poi che $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ quindi effettuiamo le varie sostituzioni.

Calcoliamo spettro di ampiezza e di fase.

$$A_n = \begin{cases} c_0 = A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt \ , n=0 \\ |2c_n|, n \geq 1 \end{cases}$$

$$\varphi_n = -\arg\{c_n\} = -(\arg\{den\} - \arg\{num\})$$

Sapendo inoltre che $\arg\{a+jb\} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$; quando ho uno zero nell'origine ho $\arg\{j\omega...\} = -\frac{\pi}{2}$; e quando devo calcolare l'argomento di un numero reale $\arg\{x\} = \begin{cases} 0, x>0 \\ \pi, x<0 \end{cases}$

La risposta di un filtro ideale passa basso, con caratteristica d'ampiezza…e caratteristica di fase…

BOH

La potenza P

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2 dt$$

La trasformata di Fourier X(w)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi \ (\omega - n\omega_0)$$

L'energia del segnale

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt$$

Lo spettro di energia

Prima calcolo la trasformata di x(t), e poi $E(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi}$

Dato un sistema lineare tempo invariante (in figura) sono richiesti:

La funzione di trasferimento H(w)

Utilizzo la regola del partitore per trovare y(t): per esempio, in un sistema RC avrò

$$y(t)=\frac{1/j\omega C}{R+1/j\omega C}x(t)=\frac{1}{1+j\omega RC}x(t)$$

$$H(\omega)=\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

L'espressione delle caratteristiche di ampiezza T(w) e di fase B(w) ed i relativi grafici

$$T(\omega)=|H(\omega)|$$

$$\varphi(\omega)=-\arg\{H(\omega)\}$$

I grafici si costruiscono tramite un semplice studio di funzione con variabile w

L'espressione dell'uscita y(t), supponendo che all'ingresso sia posto un segnale in uscita dal filtro passa basso di cui all'esercizio precedente, assumendo che la frequenza di taglio a 2 dB della rete in figura sia …Hz

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{nx}e^{jn\omega_0 t} \qquad \text{con } c_{ny}=c_{nx}H(n\omega_0)$$

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{ny}e^{jn\omega_0 t}$$

Lo spettro di energia del segnale y(t) a valle del SLTI

$$E(\omega)=\frac{|Y(\omega)|}{\pi};Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

Con riferimento ad una modulazione a prodotto siano:

s0(t)=…

x(t)=…

Si diano quindi

L'espressione dell'oscillazione modulata s(t)

$$s(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)=x(t)s_0(t)$$

So che $\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\cos(a+b)+\frac{1}{2}\cos(a-b)$ ed ottengo una soluzione del tipo:

$$s(t)=V_{01}\cos(2\pi(f_0+f_1)t-\varphi_1)+V_{01}\cos(2\pi(f_0-f_1)t+\varphi_1)+$$
$$+V_{02}\cos(2\pi(f_0+f_2)t-\varphi_2)+V_{02}\cos(2\pi(f_0-f_2)t+\varphi_2)$$

Il grafico dello spettro d'ampiezza e di fase

Sono due grafici a righe, in cui le righe stanno a $(f_0-f_2);(f_0-f_1);(f_0+f_1);(f_0+f_2)$

In questi intervalli ho, per T(w), il valore di V corrispondente alla costante che moltiplica quel coseno, e per ?(w), il valore ?i cambiato di segno, del coseno interessato.

Calcolo le quote delle V e le frequenze delle f con i dati del testo

L'espressione dell'oscillazione modulata s(t) in uscita a un filtro ideale (=> T(w0)=1) passabanda avente frequenza di taglio ft1=…e ft2=…

Dai grafici appena disegnati, vedo che tra le frequenze richieste dal testo, devo eliminare alcuni coseni, che sono fuori dalla mia banda: riscrivo la mia s(t) originale senza quei coseni, ma moltiplicando quei termini per T(w) e negli argomenti dei coseni rimasti, quando ho – ?i, devo sottrarre anche B(w), in cui w=2?(f0±fi)

Il grafico dello spettro d'ampiezza di cui al punto precedente

Il grafico come quello precedente, in cui però sopravvivono solo le righe all'interno dell'intervallo selezionato.

Con riferimento a una modulazione AM siano
s0(t)=…
x(t)=…
Si diano quindi:
L'espressione dell'oscillazione modulata s(t)

$s(t) = V_0[1+m(t)]\cos(\omega_0 t - \varphi_0) = [1+m(t)]s_0(t)$

$m(t) = kx(t)$

E faccio i calcoli esattamente come prima, solo che stavolta dovrei avere anche dei termini in cui ho il $\cos(2\pi f_0 t)$ semplice.

Il grafico dello spettro d'ampiezza e di fase del segnale

Idem come per l'esercizio precedente, solo che questa volta ho anche uno spettro a frequenza f0 di valore V0

Il valore della sensibilità k del modulatore per cui ma=…

$ma = \max |m(t)| = \max |kx(t)|$ e svolgi i calcoli per trovare il valore di k per quel determinato ma

L'espressione dell'oscillazione modulata s(t) in uscita a un filtro ideale passabanda avente frequenze di taglio ft1=…e ft2=…con caratteristica di fase …

Idem come per l'esercizio precedente.

Il grafico dello spettro d'ampiezza e di fase

Idem come per l'esercizio precedente.

Dato un segnale x(t) avente la seguente funzione di autocorrelazione: …
La densità spettrale di potenza Gxbil(w), bilatera, riferita alle pulsazioni di x(t) (con grafico)

$G_{xbil}(\omega) = \frac{F[c(\tau)]}{2\pi}$ Il grafico di questa funzione va da $-?$ a $+?$

La medesima densità, in versione monolatera Gxmono(w)

$$G_{xmono}(\omega) = \begin{cases} 2G_{xbil}(\omega), \omega \neq 0 \\ G_{xbil}(\omega), \omega = 0 \end{cases}$$

La densità spettrale di potenza, bilatera, riferita alle pulsazioni, di y(t), Gybil(w) (con grafico);

$G_{ybil}(\omega) = |H(\omega)|^2 G_{xbil}(\omega)$ Il grafico anche qui va da $-?$ a $+?$ e si trova con una semplice analisi di funzione di variabile w

La funzione di autocorrelazione di y(t), cy(t) (con grafico)

$c_y(\tau) = 2\pi F^{-1}[G_{ybil}(\omega)]$???

La potenza di y(t), Py

Per le proprietà delle funzioni di cross e autocorrelazione dei segnali a potenza finita, abbiamo $P_y = c_y(0)$

PS: un filtro ideale passabanda con frequenza di taglio wt ha H(w)=1 per w<wt, 0 altrove.
