GLI INSIEMI DEI NUMERI E LE LORO PROPRIETÀ

$\aleph = \{1,2,3,4,\ldots\}$ è l'insieme dei numeri naturali, è un insieme induttivo:

$1 \in \aleph$; $x \in \aleph$ allora $x+1 \in \aleph$

$2 = 1+1 \quad 3 = 2+1 \quad 4 = 3+1 \ \ldots$

Un insieme è induttivo se tutti i suoi elementi si ottengono da un unico elemento.

$$1 \in \aleph; \text{ se } x \in \aleph, \text{ allora } x+1 \in \aleph$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Proprietà $P(n)$, n è in indice naturale $n = 1,2,3,\ldots$

1. Verificare che $P(1)$ sia vera
2. Se $P(n)$ è vera, provare che da ciò segue $P(n+1)$ è vera con $\forall n$

Es: Disuguaglianza di Bernoulli

$P(n) = "\forall x > 0$ vale $(1+x)^n \geq 1+nx", n \in \aleph$

$P(1) = "\forall x > 0$ vale $(1+x)^1 \geq 1+x$

$P(2) = "\forall x > 0$ vale $(1+x)^2 \geq 1+2x$

$$1+2x+x^2 \geq 1+2x$$

$P(n) = "\forall x > 0, (1+x)^n \geq 1+nx"$ è vera fino all'indice n.

Verifichiamo allora il Passo 2.

$P(n+1) \quad \forall x > 0 \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$?

$1+x \geq 0 \qquad (1+x)^n \geq 1+nx$

$x > 0 \qquad \Updownarrow$

$$(1+x)\cdot(1+x)^n \geq (1+x)\cdot(1+nx)$$

$$\Updownarrow$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$$

$$\Updownarrow$$

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

FATTORIALE DI UN NUMERO NATURALE

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$$

$$0! = 1^*$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1\cdot 2 = 2$$

$$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$

$$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$

$$\ldots$$

$$n! = n\cdot (n-1)!$$

* $0! = 1$ è stabilito per convenzione

VERIFICHIAMO PER INDUZIONE

$P(n) = "n! = n(n-1)!" \, \forall n \in \aleph$

$P(1) = "1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1"$

$P(2) = "2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2"$

$P(n) = "n! = n \cdot (n-1)!"$

$P(n+1) = "(n+1)! = (n+1) \cdot n!"$

$n! = n \cdot (n-1)! = n(n-1) \cdot (n-2) \ldots$

$(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2)!$

$(n+1)n! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots = (n+1)!$

Z è l'insieme dei numeri interi = $\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} = -\aleph \cup \{0\} \cup \aleph$

CONTARE GLI ELEMENTI DI UN INSIEME

$A = \{1,3,5,8\}$ ha 4 elementi

Un insieme A è finito quando ha cardinalità $n \in \aleph$ se esiste

$f : A \rightarrow \{1,2,3,\ldots,n\}$ iniettiva e suriettiva

(posso cioè mettere in corrispondenza biunivoca A e $\{1,2,3,\ldots,n\}$

$f : \{1,3,5,8\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$ iniettiva e suriettiva

$$\begin{array}{l} f(1) = 4 \\ f(3) = 3 \\ f(5) = 1 \\ f(8) = 2 \end{array}$$

La cardinalità di A è 4

Osservazione: la cardinalità di un insieme finito è unica.

Quante funzioni f sono possibili tali che f sia iniettiva e suriettiva? $n!$

(cioè il numero massimo di combinazioni possibili)

$n!$ rappresenta il numero di modi in cui posso ordinare un insieme costituito da n elementi.

$$\begin{array}{ll} a \rightarrow 1 & f(a) = 1 \\ \{a,b\} \rightarrow \{1,2\} & \begin{array}{l|l} f(a) = 1 & f(a) = 2 \\ f(b) = 2 & f(b) = 1 \end{array} \\ \{a,b,c,\} \rightarrow \{1,2,3\} & \end{array}$$

1	2	3	f=3!
2	1	3	
2	3	1	
1	3	2	
3	1	2	
3	2	1	

n! è il numero di possibilità in cui posso permutare l'insieme $\{1,\ldots,n\}$
$\aleph$ è costituito da un numero infinito di elementi.
Non ha cardinalità finita $f:\aleph \not\to \{1,\ldots,n\}$ iniettiva
$\aleph$ è numerabile (ha un numero finito di elementi)

$f:Z\to\aleph$ *è iniettiva e suriettiva?*
$\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$
$\{1,2,3,4,\ldots\}$

Z	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\aleph$	7	5	3	1	2	4	6

Numero da uno a n l'insieme Z partendo da 0 e prendendo poi il primo numero positivo, il primo numero negativo, il primo numero positivo non contato, il primo numero negativo non contato e così via…
Quindi Z è numerabile.

Sappiamo che come insieme $\aleph \le Z$ ma se contiamo gli elementi, hanno la stessa cardinalità.

$a\in Q$ = insieme dei numeri razionali
$a=\frac{p}{q}, p,q\in Z \quad q\neq 0$

$\frac{-2}{-3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3};\frac{5}{7};-\frac{1000}{5};\ldots$
$Q\ge Z,\aleph$ q = 1

$f:Q\to\aleph$ *è iniettiva e suriettiva?*
Si, Q è un insieme numerabile.

Insieme dei numeri reali positivi

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \ldots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \ldots \\
\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

$f(1)=1; f(2)=2; f\left(\frac{1}{2}\right)=3; f(3)=4; f\left(\frac{3}{2}\right)=5; \ldots$

Se conto gli elementi, ℵ, Z e Q hanno tutti la stessa cardinalità.

$\Re \qquad \sqrt{2} \notin Q$

Supponiamo $\frac{p}{q}=\sqrt{2}$, con $p,q \in \aleph$ primi fra loro.

$\frac{p^2}{q^2}=2 \rightarrow 2q^2=p^2$ non ci sono soluzioni in ℵ perché p e q sono primi tra loro.

Supponiamo q pari → p dispari → p^2 dispari

Supponiamo q dispari: $\begin{array}{l} A)\, p = pari \\ B)\, p = dipari \end{array}$

A) $2q^2 = p^2 \rightarrow 2$ compare un numero pari di volte.

$\downarrow$

2 compare una volta sola.

B) 2 compare una volta → 2 non compare mai in p e in q, quindi non posso MAI risolvere $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ con $p,q \in \aleph$.

$n \in \aleph$

$1537 = 1\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0$

$-1537 = -\left(1\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0\right)$

$q \in Q$

$1537{,}62 = 1\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 6\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2}$

$1537{,}62\overline{3} = 1\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 6\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{-4} + \ldots$

$x \in \Re$

$x_q x_{q-1} \ldots x_1 x_0 , x_{-1} x_{-2} x_{-3} \ldots$

infinite cifre decimali.

RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO x IN BASE p

$x \in \aleph$

$p \in \aleph, p \geq 2$

cifre $\{0,1,2,3,\ldots,p-1\}$

PRINCIPIO POSIZIONALE: a seconda della posizione della cifra, il numero ha un valore diverso.

Es: $p=10$ cifre $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$152 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2$

$(152)_6 = 1 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 2 = (68)_{10}$

$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2 + 1 = (11)_{10}$

$p = 2$ cifre $\{0,1\}$

$p = 8$ cifre $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$p = 16$ cifre $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$ dopo la base 10 si usano le lettere perché mancano le cifre.

TRASFORMARE UN NUMERO DA P=10 A P=X

$57 = 5 \cdot 10 + 7$ quanto vale in base 2? $(a_n a_{n-1} \ldots a_0)$

57:2=28 resto **1** la cifra più bassa del numero in base 2 = a_0

28:2=14 resto **0** $= a_1$

14:2=7 resto **0** $= a_2$

7:2=3 resto **1** $= a_3$

3:2=**1** resto **1** $= a_4$

$\uparrow$ numero più piccolo della base $\rightarrow$ cifra più alta $= a_5$

$(111001)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 57$

Es:

57:8=7 resto $\mathbf{1} = a_0$

$(71)_8 = 7 \cdot 8 - 1 = 56 + 1 = 57$ base 10

$$x = (a_n a_{n-1} \ldots a_0) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i$$

i = indici naturali = 0, 1, 2, …, n

$x \in Z \quad x < 0$
$x = -57 = -(5 \cdot 10 + 7)$
$p = 2 \Rightarrow -(111001)_2$ Il problema del cambiamento di base non sorge con i numeri interi perché l'unica differenza sta nell'aggiungere un – prima del numero.

$x \in Z$, $x < 0 \qquad -(a_n a_{n-1} \ldots a_0) = -\sum_{i=0}^{n} a_i p^i$

$x \in Q \Leftrightarrow \exists s, q \in Z, q > 0$ tali che

$\downarrow \qquad x = \frac{s}{q}$

numero finito di cifre decimali, oppure rappresentazione periodica.

$x = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})_p$ oppure

$x = \left(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m} \overline{a_{-(m+1)} \ldots a_{-(m+l)}}\right)_p$

$\frac{2}{3} = 0,\bar{6} = (0,2)_3 = 2 \cdot 3^{-1}$

Un numero razionale ammette sempre una rappresentazione finita in una base q se $x = \frac{p}{q}, (q < 0)$

$57{,}12 = 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$

$(57{,}12)_8 = 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1} + 2 \cdot 8^{-2}$

$(101{,}11)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$

$$x = \frac{s}{q} \quad (q > 0) \quad n, m \in \aleph$$

$$x = \left(a_n a_{n-1} \ldots a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}\right)_q = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + \ldots + a_{-m} q^{-m} =$$

$$= \sum_{i=-m}^{n} a_i q^i = \sum_{i=0}^{n} a_i q^i + \sum_{i=-m}^{-1} a_i q^i$$

$$x = \frac{s}{q} \quad s \geq q \quad s = b \cdot q + y \quad b \in \aleph, y \in \{0,1,\ldots,q-1\}$$

$$x = \frac{s}{q} = \frac{bq + y}{q} = b + \frac{y}{q} \quad 0 \leq y \leq q$$

$$b = (a_n \ldots a_0)q \quad \frac{y}{q} = (0, a_{-1}, \ldots)q$$